

Az ellipszis és a hiperbola paraméteres egyenletrendszeréről

Az [1] internetes analitikus geometria - könyvben találtuk az 1. ábrán mutatott részt.

instante t ; esta información, en cambio, no puede obtenerse de la ecuación rectangular (3) la cual simplemente da la trayectoria del proyectil.

Ahora obtendremos una representación paramétrica sencilla para una elipse. Tracemos dos circunferencias concéntricas (fig. 127) que tengan su centro común en el origen y de radios a y b , siendo $a > b$. A partir del origen O tracemos una recta cualquiera l que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje X , y sean A y B los puntos de intersección con las circunferencias de radios a y b , respectivamente. Bajemos las perpendiculares AC y BD al eje X , y por B

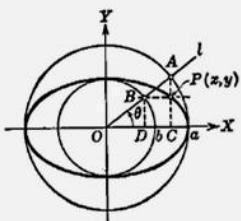


Fig. 127

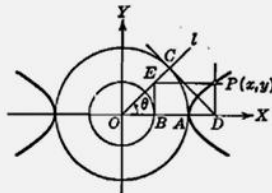


Fig. 128

tracemos una recta paralela al eje X y sea P su punto de intersección con AC . Vamos a obtener las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de $P(x, y)$. Como P se mueve de acuerdo con la rotación de la recta l en torno de O , tomaremos como parámetro el ángulo θ . De los triángulos rectángulos OAC y OBD , tenemos

$$x = \overline{OC} = \overline{OA} \cos \theta = a \cos \theta$$

$$y = \overline{CP} = \overline{DB} = \overline{OB} \sin \theta = b \sin \theta$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de P son

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta. \quad (4)$$

Es muy fácil eliminar el parámetro θ de las ecuaciones (4) y obtener la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Por tanto, las ecuaciones (4) son una representación paramétrica de la elipse (5). El parámetro θ se llama *ángulo excéntrico* del punto P ,

y las circunferencias concéntricas de radios a y b se llaman, respectivamente, *círculo principal* y *círculo menor* de la elipse.

Una representación paramétrica sencilla de la hipérbola puede obtenerse como sigue. Tracemos dos circunferencias concéntricas que tengan su centro común en el origen y que sus radios sean $OA = a$ y $OB = b$, en que $a > b$, como se ve en la figura 128. A partir de O tracemos una recta cualquiera l que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje X , y sea C el punto de intersección con la circunferencia de radio a . En C tracemos la tangente a la circunferencia; designemos por D el punto en que esta tangente corta al eje X . En B tracemos una perpendicular al eje X y sea E su punto de intersección con l . Por D y E tracemos rectas paralelas a los ejes Y y X , respectivamente; designemos por P el punto de intersección de estas rectas. Ahora vamos a obtener las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de $P(x, y)$, usando θ como parámetro. De los triángulos rectángulos OCD y OBE , tenemos

$$x = \overline{OD} = \overline{OC} \sec \theta = a \sec \theta$$

$$y = \overline{DP} = \overline{BE} = \overline{OB} \tan \theta = b \tan \theta.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico de P son

$$x = a \sec \theta, \quad y = b \tan \theta, \quad (6)$$

y la ecuación rectangular puede hallarse fácilmente y es (véase el ejemplo 1 del Artículo 90)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Por tanto, las ecuaciones (6) son una representación paramétrica de la hipérbola (7). El parámetro θ se llama *ángulo excéntrico* del punto P , y el círculo de radio a se llama *círculo auxiliar* de la hipérbola.

93. La cicloide. Sea P un punto cuya posición sea fija con relación a una curva C . Si la curva C rueda, sin resbalar, sobre una curva fija C' , el lugar geométrico descrito por el punto P se llama *ruleta*.

Un caso importante de ruleta es la curva llamada *cicloide*. Una cicloide es el lugar geométrico descrito por cualquier punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta fija. Deduiremos las ecuaciones paramétricas de la cicloide tomando la recta fija como eje X y una de las posiciones del punto móvil sobre el eje X como origen. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar

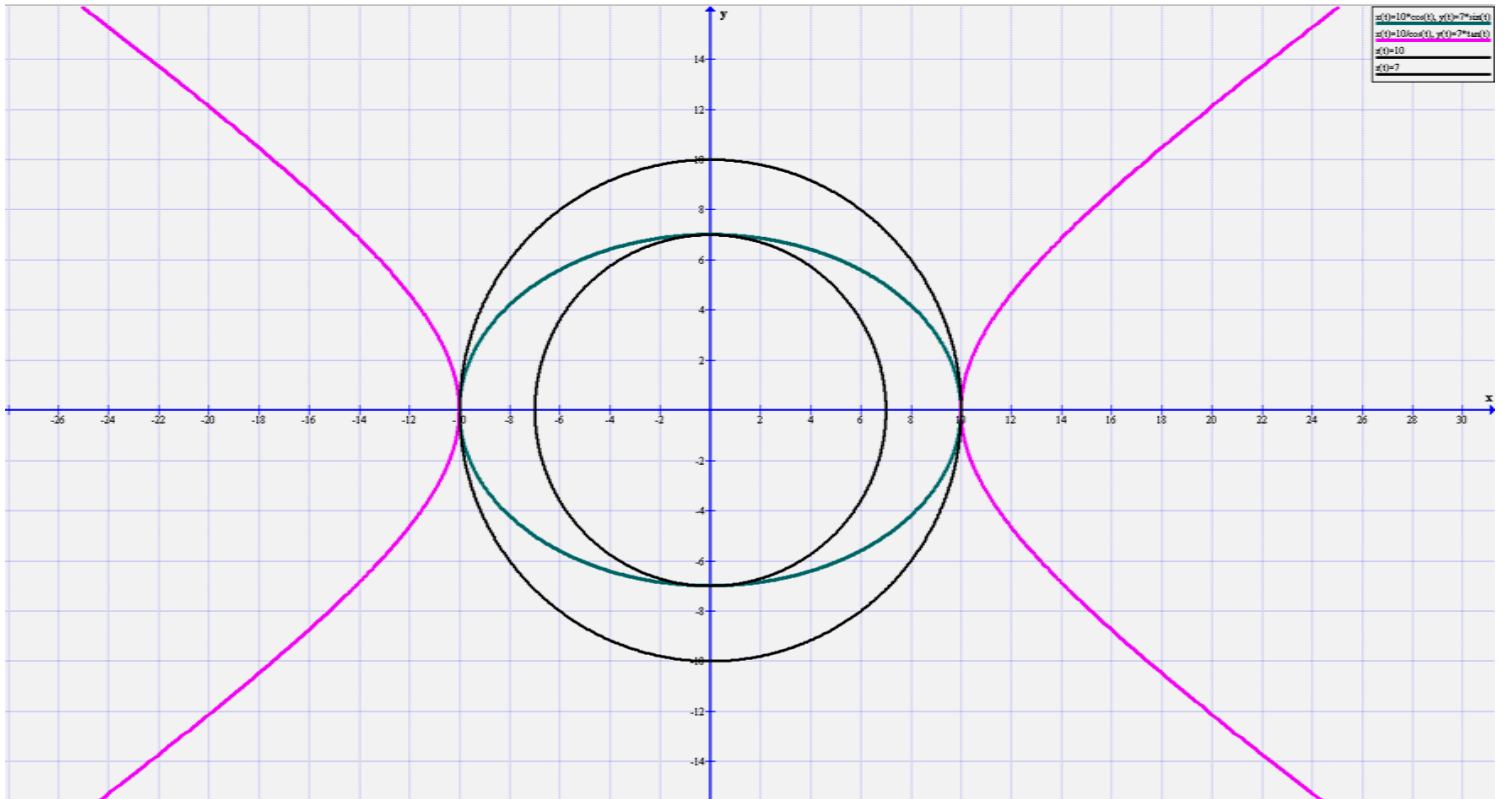
1. ábra – forrása: [1]

Úgy látjuk, hogy igencsak tanulságos. Főleg azért, mert nagyon ritkán találkozhatunk a hiperbola paraméteres egyenletrendszerének felírását támogató ábrával, ellentétben az ellipszis esetével. A grafikonjaikat a 2. ábrán rajzoltuk meg, mutatva, hogy a képletek valóban működnek, vagyis leírják a teljes görbét.

E képletek a mi írásmódunkkal az alábbiak.

Ellipszis:

$$x(\theta) = a \cdot \cos \theta, \quad y(\theta) = b \cdot \sin \theta; \quad 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi. \quad (1)$$



2. ábra

Hiperbola:

$$\underline{x(\theta) = \frac{a}{\cos \theta} \quad , \quad y(\theta) = b \cdot \operatorname{tg} \theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi \quad .} \quad (2)$$

Az 1. ábra adatai:

$$a = 10 \text{ (cm)} \quad ; \quad b = 7 \text{ (cm)} \quad . \quad (A)$$

Ahogy a spanyol szövegben is írják, a θ paraméter kiküszöbölésével kapjuk a görbe derékszögű koordinátás (implicit) egyenletét.

Ellipszis:

$$\underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \underline{= 1} .} \quad (3)$$

Hiperbola:

$$\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \operatorname{tg}^2 \theta = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) - \operatorname{tg}^2 \theta \underline{= 1} .} \quad (4)$$

Érdekes megfigyelni, hogy az 1. ábrán az $r = a$ sugarú kör hogyan „választja el” egymástól az ellipszist és a hiperbolát.

Forrás:

[1] – <https://archive.org/details/GeometriaAnalitica/page/n289/mode/1up>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2021. 04. 21.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>